TEMA 5: APLICACIONES LINEALES

Motivación

En Física se distinguen tres ~~d~~ tipos distintos de magnitudes físicas:

1) Magnitudes escalares: temperatura, presión, etc....
El objeto matemático de que disponemos para cuantificar estas magnitudes son los escalares, es decir, los números.

2) Magnitudes vectoriales: velocidad, fuerza, campo eléctrico,...
Matemáticamente, disponemos de los vectores para cuantificarlas.

3) Magnitudes tensoriales: tensor de inercia de un sólido rígido, tensor de deformaciones y de tensiones en elasticidad, los tensores de los fluidos, etc....

Matemáticamente, estas magnitudes se cuantifican a través de las aplicaciones lineales (también llamadas en estos casos tensores) o a través de los objetos que usamos para representar una aplicación lineal en un determinado sistema de coordenadas, es decir, las "matrices".

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES BÁSICAS

Def. (Aplicación lineal)

Sean V y W dos e.v. Una aplicación

$$f: V \longrightarrow W$$

se dice lineal si cumple:

1) $f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall\, u, v \in V$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \forall\, u \in V,\ \forall\, \alpha \in K.$

Ejemplos

1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = x + y - z$$

Veamos que f es lineal:

- $f((x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) = f(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$

$$= (x_1+x_2) + (y_1+y_2) - (z_1+z_2)$$

$$= \underbrace{x_1 + y_1 - z_1}_{f(x_1,y_1,z_1)} + \underbrace{x_2 + y_2 - z_2}_{f(x_2,y_2,z_2)}$$

- $f(\alpha(x,y,z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha x + \alpha y - \alpha z = \alpha(x+y-z)$

$$= \alpha f(x,y,z).$$

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Veamos que f no es lineal

$\alpha = -1,\quad f(-1\cdot(x,y,z)) = f(-x,-y,-z) = \sqrt{(-x)^2+(-y)^2+(-z)^2}$

$$= 1 \cdot f(x,y,z) \neq -1 \cdot f(x,y,z).$$

Def. (Núcleo e imagen de una aplicación lineal)

Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal.

- Se llama núcleo de f, denotado $\ker(f)$, al conjunto

$$\ker f = \{ v \in V : f(v) = 0 \}$$

- Se llama imagen de f, denotado $\operatorname{Im} f$, al conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{ w \in W : \exists\, v \in V \text{ que cumple } f(v) = w \}$$

Propiedades

1) $\ker f$ es un subespacio vectorial de V.
2) $\operatorname{Im} f$ " " " " W.
3) Si $f: V \to W$ es lineal y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base, ~~de V~~ o sistema generador de V, entonces

$$f(B) = \{ f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n) \}$$

es un sistema generador de $\operatorname{Im} f$.

4) f es inyectiva si y sólo si $\ker f = \{0\}$
5) f es sobreyectiva si y sólo si $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$
6) Se cumple la fórmula de las dimensiones

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$

Recordatorio:

Recordemos que f se dice inyectiva si $f(u) \neq f(v)$ $\forall\, u \neq v$.

f es sobreyectiva si y sólo si $\forall\, w \in W\ \exists\, v \in V : f(v) = w$.

f se dice biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

~~Así~~ Veamos cómo se puede demostrar, por ejemplo, ~~Com~~ la propiedad 4) anterior.

~~Supongamos que f es inyectiva.~~

f inyectiva $\Rightarrow \ker f = \{0\}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que no, es decir, que existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $f(v)=0$.

Como en toda aplicación lineal $f(0)=0$, ¿por qué?,

$$f(0)=f(0\cdot v)=0\cdot f(v)=0.$$

entonces
$$f(0)=0$$
$$f(v)=0 \qquad 0 \neq v \qquad \text{ABSURDO.}$$

$\ker f = \{0\} \Rightarrow f$ es inyectiva.

Sean $u, v \in V$ tales que $f(u)=f(v)$.

Entonces $f(u-v)=f(u)-f(v)=0$.

Por tanto $u-v \in \ker f = \{0\} \Rightarrow u=v$.

<u>Ejemplo</u>

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)=(-x+5y,\ 2x,\ 0)$$

$$\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y)=(-x+5y,\ 2x,\ 0)=(0,0,0)\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} -x+5y & =0 \\ 2x & =0 \end{array}\right\} \quad x=0,\ y=0.$$

$\ker f = \{(0,0)\}$ f es inyectiva.

$$\underset{2}{\underset{\parallel}{\dim \mathbb{R}^2}} = \underset{0}{\underset{\parallel}{\dim \ker f}} + \underset{2}{\underset{\parallel}{\dim \operatorname{Im} f}}$$

~~$\Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$~~

f no es sobreyectiva.

$$\mathrm{Im} f = \langle f(1,0),\ f(0,1) \rangle$$
$$= \langle (-1,2,0),\ (5,0,0) \rangle .$$

MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACION LINEAL

Sean V y W dos e.v. y

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y

$B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base de W.

Sea ahora $f: V \to W$ una aplicación lineal.

Se llama matriz asociada a f respecto de las bases B y B', denotado $M_{B\to B'}(f)$, a la matriz cuyas columnas son las coordenadas de las imágenes de los vectores de B en B', es decir, si

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$
$$f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m$$
$$\text{— — — — — — — — —}$$
$$f(v_n) = a_{1m}w_1 + a_{2m}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$$

entonces

$$M_{B\to B'}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow & \qquad\qquad \uparrow \\ f(v_1)_{B'} & f(v_2)_{B'} & \qquad f(v_n)_{B'} \end{matrix} \end{array}$$

Nota.- Nótese que si $V = W$ y $f = \mathrm{Id}$, entonces

$M_{B\to B'}(\mathrm{Id}) \equiv$ matriz de cambio de base de B a B'

Ejemplo

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x-y\,,\, x+2y)$

$B = \{(3,1)\,,\,(-1,2)\}$

$B' = \{(0,1)\,,\,(1,-1)\}$

Calcula $M_{B\to B'}(f)$

$$M_{B\to B'}(f) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$f(3,1) = (3-1\,,\, 3+2\cdot 1)$

$= (2,5) = a_{11}(0,1) + a_{21}(1,-1)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = a_{21} \\ 5 = a_{11} - a_{21} \end{array}\right\} \to a_{11} = 5 + a_{21} = 5+2 = 7$

$f(-1,2) = (-3,3) = a_{12}(0,1) + a_{22}(1,-1)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3 = a_{22} \\ 3 = a_{12} - a_{22} \end{array}\right\} \to a_{12} = 3 + a_{22} = 0$

Propiedades de la matriz asociada a una aplicación lineal

1) Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y dadas bases B de $\mathbb{R}^n$ y B' de $\mathbb{R}^m$, entonces existe una única aplicación lineal

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que $M_{B\to B'}(f) = A$.

2) Sea $A = M_{B\to B}(f)$. Entonces,

$$\text{rango}(A) = \dim \operatorname{Im} f,$$

independientemente de las bases B y B' elegidas

Ejemplo

Determinar si la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada respecto a ciertas bases es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es inyectiva.

Recordatorio: f inyectiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rango}(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rango}(A) = 2 = \dim \operatorname{Im} f$$

$\Rightarrow \dim \ker f = 1 \to \ker f \neq \{0\}$.

3) Supongamos que tenemos el esquema

$$\begin{tikzcd} \underset{B}{V} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \underset{B'}{W} \arrow[r, "g"] & \underset{B''}{U} \end{tikzcd}$$

Entonces,

$$M_{B \to B''}(g \circ f) = M_{B' \to B''}(g) \cdot M_{B \to B'}(f)$$

Ejemplo

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 3x_2 + x_3, \; -x_2 + 2x_4)$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, \; 0, \; x_1 + 4x_2)$

$g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (g \circ f)(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(f(x_1, x_2, x_3, x_4))$$

$$= g(x_1 - 3x_2 + x_3, \; -x_2 + 2x_4)$$

$$= (2(x_1 - 3x_2 + x_3) - 3(-x_2 + 2x_4), \; 0,$$

$$\cancel{2}\, x_1 - 3x_2 + x_3 + 4(-x_2 + 2x_4))$$

$$= (2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4, \; 0, \; x_1 - 7x_2 + x_3 + 8x_4)$$

$$M_{C^4 \to C^2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$f(1,0,0,0) = (1, 0)$

$f(0,1,0,0) = (-3, -1)$

$f(0,0,1,0) = (1, 0)$

$f(0,0,0,1) = (0, 2)$

$$M_{C_2 \to C_3}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$f(1,0) = (2, 0, 1)$

$f(0,1) = (-3, 0, 4)$

$$M_{C_4 \to C_3}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$(g\circ f)(1,0,0,0) = (2, 0, 1)$

$(g\circ f)(0,1,0,0) = (-3, 0, -7)$

$(g\circ f)(0,0,1,0) = (2, 0, 1)$

$(g\circ f)(0,0,0,1) = (-6, 0, 8)$

$$\underset{C_4\to C_3}{M}(g\circ f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

4) (Importante en las aplicaciones) Supongamos que $f: V \to V$ es lineal (endomorfismo o tensor) y que tenemos dos bases B y B' de V. Tenemos entonces las siguientes matrices

$$M_{B\to B}(f) \quad \text{y} \quad M_{B'\to B'}(f),$$

que representan al mismo tensor f.

¿Qué relación existe entre estas dos matrices?

$$\begin{tikzcd} V_{B'} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & V_{B'} \\ V_B \arrow[r, "f"] & V_B \arrow[u, "Id"'] \end{tikzcd}$$

$$M_{B'\to B'}(f) = \underbrace{M_{B\to B'}(Id)}_{\substack{\| \\ M_{B\to B'}(Id)^{-1}}} M_{B\to B}(f) \; M_{B'\to B}(Id)$$

En lenguaje matricial, dos matrices cuadradas A y A' se dicen semejantes si existe una matriz invertible Q tal que

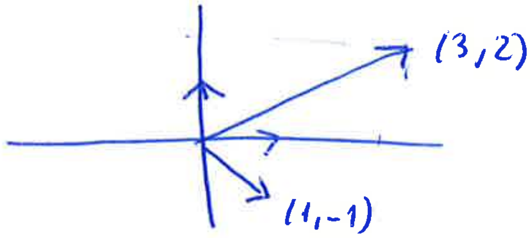
$$A' = Q^{-1} A Q.$$

Ejemplo

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad f(x,y) = (2x-y,\ x+4y)$

$B = \{(1,0),\ (0,1)\}$

$B' = \{(1,-1),\ (3,2)\}$



$$M_{B\to B}(f) = \left(f(1,0)\ ,\ f(0,1) \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_{B'\to B}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(1,-1) = 1\cdot(1,0) - 1\cdot(0,1)$$

$$(3,2) = 3\cdot(1,0) + 2\cdot(0,1)$$

$$M_{B\to B'}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{5}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$M_{B'\to B'}(f) = M_{B\to B'}(Id)\, M_{B\to B}(f)\ M_{B'\to B}(Id)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$